

TET III - Formelsammlung

Matthias Jung

15. März 2009

1 Die Maxwell'schen Gleichungen:

Differentialform:

1. Durchflutungsgesetz: $\text{rot}(\vec{H}) = \vec{g} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
2. Induktionsgesetz: $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
3. Wirbelfelder sind Quellenfrei: $\text{div}(\vec{B}) = 0$
Es gibt keine magnetischen Monopole
4. Elektrische Quellen: $\text{div}(\vec{D}) = \rho$

Integralform:

1. $\oint \vec{H} d\vec{s} = \int_A \left(\vec{g} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A}$
2. $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$
3. $\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$
4. $\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho dV = \Omega = Q$

Materialgleichungen:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{\epsilon}_r(\vec{E}) \cdot \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{\mu}_r(\vec{H}) \cdot \vec{H}$$

Vakuungleichungen:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$$

Ohmsches Gesetz:

$$\vec{g} = \kappa \cdot \vec{E}$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\text{div} \left(\vec{g} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \frac{\kappa}{\epsilon} \cdot \rho(\vec{r}, t) + \dot{\rho}(\vec{r}, t) = 0$$

2 Elektrisches Feld

Poissonsgleichung:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Laplacegleichung:

$$\Delta \varphi = 0$$

Coulombsches Gesetz:

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

Elektrisches Feld:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

Charakteristisch E-Felder:

$$E_P \sim \frac{1}{r^2} \quad E_L \sim \frac{1}{r} \quad E_F \sim 1$$

Punktladung Linienladung Flächenladung

Grenzflächenbedingungen:

$$D_{n1} = \varepsilon_{01} \varepsilon_{r1} \cdot E_{n1} = \varepsilon_{02} \varepsilon_{r2} \cdot E_{n2} = D_{n2}$$

$$E_{t1} = E_{t2}$$

Potentialfunktion:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}_i)}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}_i|} dV$$

Elektrisches Feld:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i(\vec{r}_0 - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}_i|^2}$$

$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi) = -\vec{\nabla} \cdot \varphi$$

Strom:

$$I = \int_A \langle \vec{g}, d\vec{A} \rangle \quad \text{Homog. Verteil.: } |\vec{g}| = \frac{I}{A}$$

Kapazität:

$$C = \frac{Q}{U}$$

Energiegehalt des E-Felds

$$W_{el} = \frac{1}{2} \int_V \langle \vec{E}, \vec{D} \rangle dV = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

Arbeit:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = -Q \int \vec{E} d\vec{s}$$

Elektrisches Dipolmoment:

$$\vec{p} = Q \cdot d\vec{s} \quad \text{Weisst von } -|Q| \text{ nach } +|Q|$$

Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = -|\vec{p}| \cdot |\vec{E}| \cdot \sin \alpha$$

Masseträgheitsmoment:

$$J = \sum_i m_i \cdot r_i^2$$

Winkelbeschleunigung:

$$M = J \cdot \ddot{\alpha}$$

3 Magnetfeld

Lorentzkraft:

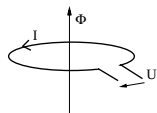
$$\vec{F} = (Q \cdot \vec{v}) \times \vec{B} = (I \cdot \vec{l}) \times \vec{B}$$

Magnetischer Fluss

$$\phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Induktionsgesetz: Siehe M II

$$U = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

**Energiegehalt des Magnetfelds**

$$W_{mag} = \frac{1}{2} \int_V \langle \vec{H}, \vec{B} \rangle dV = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

Gegeninduktivität:

$$M_{12} = \frac{\phi_{12}}{i_1} = \frac{\int \langle \vec{B}_1, d\vec{A}_2 \rangle}{i_1}$$

4 Wellen

Wellentypen:

TE:

$\vec{E}$ liegt nur transversal zur Ausbreitungsrichtung.

$\vec{H}$ Kann Komponente in Ausbreitungsrichtung haben.

TE:

$\vec{H}$ liegt nur transversal zur Ausbreitungsrichtung.

$\vec{E}$ Kann Komponente in Ausbreitungsrichtung haben.

TEM:

$\vec{H}$ und $\vec{E}$ haben nur transversale Komponente

s-Polarisation:

$\vec{E}$ ist senkrecht zur Einfallsebene

p-Polarisation:

$\vec{E}$ ist parallel zur Einfallsebene

Wellengleichung:

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Allgemeine komplexe Beschreibung:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y, z) \cdot e^{j(\omega t - \langle \vec{k}, \vec{r} \rangle + \varphi_0)}$$

Beispiel: Welle in Z-Richtung, X-polarisiert.

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_x \cdot e^{j(\omega t - k \cdot z + \varphi_0)} \cdot \vec{e}_x$$

Wellenvektor: (Im Schichtwellenleiter $\vec{\beta}$)

$$\vec{k} = k \cdot \vec{e}_a$$

Ausbreitungskonstante: (β)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega \cdot n}{c_0} = \sqrt{(G + j\omega C)(R + j\omega L)}$$

Brechzahl und Lichtgeschwindigkeit:

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$c = \frac{c_0}{n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \mu_r}}$$

Wellenwiderstand:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega$$

$$Z = Z_0 \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = \mu \cdot c = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$\text{Bei } \mu_r = 1 \rightarrow Z = \frac{Z_0}{n} \text{ und } k = k_0 \cdot n$$

Reflexionskoeffizient:

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2$$

Zusammenhang:

$$\vec{H} = \frac{1}{Z} (\vec{e}_a \times \vec{E})$$

Snellius:

$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$$

Bedingung Totalreflexion:

$$n_{\text{Kern}} > n_{\text{Mantel}}$$

Pointing Vektor:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Pointingsche Satz:

$$\int_{\partial V} \vec{S} d\vec{A} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V -\frac{1}{2} \mu H^2 - \frac{1}{2} \varepsilon E^2 dV - \int_V \langle \vec{g}, \vec{E} \rangle dV$$

Mittlere Leistung:

$$\vec{P}' = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}$$

$$P = \int_A \langle \vec{P}', d\vec{A} \rangle$$

5 Mathematisches

Volumen einer Kugel:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$$

Oberfläche einer Kugel:

$$A = 4\pi r^2$$

Volumen eines Zylinders:

$$V = \pi r^2 h$$

Oberfläche eines Zylinders:

$$A = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

Rechnen mit dem Nablaoperator:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \varphi &= \text{grad} \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \\ \langle \vec{\nabla}, \vec{E} \rangle &= \text{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \text{rot} \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \\ \text{div}(\text{grad}(\dots)) &= \Delta \dots = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \cdot (\dots) \end{aligned}$$

Der Gradient : Skalarfeld $\rightarrow$ Vektorfeld

Die Divergenz : Vektorfeld $\rightarrow$ Skalarfeld

Die Rotation : Vektorfeld $\rightarrow$ Vektorfeld

Satz von Gauss:

$$\int_V \text{div}(\vec{F}) dV = \oint_{\partial V} \langle \vec{F}, d\vec{A} \rangle$$

Satz von Stokes:

$$\int_A \text{rot}(\vec{F}) dA = \oint_{\partial A} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle$$

Rechenregeln für Divergenz:

$$\text{div}(c \cdot \vec{F}) = c \cdot \text{div}(\vec{F})$$

$$\text{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{div}(\vec{F}) + \text{div}(\vec{G})$$

$$\text{div}(u(\dots) \cdot \vec{F}) = \langle \text{grad}(u(\dots)), \vec{F} \rangle + u(\dots) \cdot \text{div} \vec{F}$$

$$\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \langle \vec{G}, \text{rot}(\vec{F}) \rangle - \langle \vec{F}, \text{rot}(\vec{G}) \rangle$$

$$\text{div}(\text{rot}(\dots)) = 0$$

Rechenregeln für Rotation:

$$\text{rot}(c \cdot \vec{F}) = c \cdot \text{rot}(\vec{F})$$

$$\text{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{rot}(\vec{F}) + \text{rot}(\vec{G})$$

$$\text{rot}(\varphi \cdot \vec{F}) = \varphi \text{rot}(\vec{F}) + \text{grad}(\varphi) \times \vec{F}$$

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{F})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{F})) - \Delta \vec{F}$$

$$\text{rot}(\text{grad}(\varphi)) = 0$$

