

TET - Formelsammlung

Matthias Jung

30. August 2008

1 Differentialgleichungen

Characterisierung von DGLn:

- Linear: $y(t)$ sowie $\dot{y}(t)$, $\ddot{y}(t)$... kommen nur in der 1. Potenz vor
- Gewöhnlich: $y(t)$ hängt nur von einer Variablen ab
- Homogen: $f(t) = 0$ Inhomogen $f(t) \neq 0$
- Zeitinvariant: Wenn Faktoren vor y nicht von t abhängen
- Ordnung: Grad der Ableitung oder Anzahl der unabhängigen Energiespeicher

1.1 Wichtige Ansätze für Impuls und Sprungantwort

Bemerkung:

n = Ordnung des Netzwerks

m = Ordnung der Erregung

Differenzierendes Netzwerk:

$$n < m$$

$$h(t) = f(t) \cdot s(t) + c \cdot \delta(t) + d \cdot \dot{\delta}(t)$$

Impulsdurchlässiges Netzwerk:

$$n = m$$

$$h(t) = f(t) \cdot s(t) + c \cdot \delta(t)$$

Integrierendes Netzwerk:

$$n > m$$

$$h(t) = f(t) \cdot s(t)$$

Eigenfrequenzen:

Lösen des charakteristischen Polynoms der homogenen DGL.

Bsp: $\ddot{u} + p \cdot \dot{u} + q \cdot u = c \cdot \dot{u}_0$

$$\rightarrow s^2 + p \cdot s + q = 0$$

$$\rightarrow s_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Ansatz der Eigenfunktionen:

$$Ef(t)_n = e^{s_n \cdot t}$$

Für: $s_1 \neq s_2 \neq \dots$

$$f(t) = A \cdot Ef_1(t) + B \cdot Ef_2(t) \dots$$

Für: $s_1 = s_2 = \dots$

$$f(t) = A \cdot Ef_1(t) + B \cdot t \cdot Ef_2(t) \dots$$

Ansatz bei harmonischer Erregung:

$$u_0(t) = U_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

$$u(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_0 t)$$

Sprungantwort:

$$a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot s(\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) d\tau \cdot s(t)$$

2 Fourier-Reihe

Die Fourier-Reihe dient zur Netzwerkanalyse bei stationären periodischen Eingangssignalen.

Fourier-Reihe:

$$x(t) = X_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \{a_{\mu} \cdot \cos(\mu\omega_0 t) + b_{\mu} \cdot \sin(\mu\omega_0 t)\} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$\mu = 1$ Grundschiwingung
 $\mu = 2, 4, 6 \dots$ gerade Oberschwingungen
 $\mu = 1, 3, 5 \dots$ ungerade Oberschwingungen
 $\mu = 1, 2, 3 \dots$ Harmonische

 X_0 Gleichanteil:

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

A-Koeffizient:

$$a_{\mu} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos(\mu\omega_0 t) dt$$

$$a_{\mu} = 0 \text{ für ungerade Funktionen}$$

B-Koeffizient

$$b_{\mu} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \sin(\mu\omega_0 t) dt$$

$$b_{\mu} = 0 \text{ für gerade Funktionen}$$

3 Fouriertransformation

Die Fouriertransformation ist nur anwendbar wenn das zu transformierende Signal ein Energiesignal ist (ein Signal mit finiter Energie). Sie dient zur Netzwerkanalyse bei aperiodischen Eingangssignalen.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Hintransformation:

$$x(t) \circ \! \! \! \longrightarrow X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Rücktransformation:

$$X(j\omega) \circ \! \! \! \longrightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{+j\omega t} d\omega$$

Wichtige Regeln

$$\begin{aligned}
 a \cdot x(t) + b \cdot y(t) &\longleftrightarrow a \cdot X(j\omega) + b \cdot Y(j\omega) \\
 x(-t) &\longleftrightarrow X^*(j\omega) \\
 x(at) &\longleftrightarrow \frac{1}{a} X\left(j\frac{\omega}{a}\right) \\
 x(t \pm T) &\longleftrightarrow X(j\omega) \cdot e^{\pm j\omega T} \\
 x(t - T) \cdot e^{\mp j\omega_0 t} &\longleftrightarrow X(j\omega \pm j\omega_0) \\
 t^n \cdot x(t) &\longleftrightarrow (j)^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(j\omega)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^n}{dt^n} x(t) &\longleftrightarrow (j\omega)^n \cdot X(j\omega) \\
 \int_{-\infty}^t x(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} \cdot X(j\omega) + \pi X(0) \cdot \delta(j\omega) \\
 x(t) * y(t) &\longleftrightarrow X(j\omega) \cdot Y(j\omega) \\
 x(t) \cdot y(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} (X(j\omega) * Y(j\omega)) \\
 \delta(t) &\longleftrightarrow 1 \\
 1 &\longleftrightarrow 2\pi \delta(j\omega)
 \end{aligned}$$

4 Laplace Transformation

Hintransformation:

$$x(t) \longleftrightarrow X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$$

Rücktransformation:

$$X(j\omega) \longleftrightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-j\infty}^{j\infty} X(j\omega) \cdot e^{-j\omega t} d\omega$$

Wichtige Transformationen:

$$\begin{aligned}
 s(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{s} \\
 \delta(t) &\longleftrightarrow 1 \\
 \dot{\delta}(t) &\longleftrightarrow s \\
 \ddot{\delta}(t) &\longleftrightarrow s^2 \\
 e^{\alpha t} \cdot s(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{s - \alpha} \\
 \sin(\beta t) \cdot s(t) &\longleftrightarrow \frac{\beta}{s^2 + \beta^2} \\
 \cos(\beta t) \cdot s(t) &\longleftrightarrow \frac{s}{s^2 + \beta^2} \\
 e^{-\alpha t} \cdot \sin(\beta t) \cdot s(t) &\longleftrightarrow \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \\
 e^{-\alpha t} \cdot \cos(\beta t) \cdot s(t) &\longleftrightarrow \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \\
 t \cdot e^{\alpha t} &\longleftrightarrow \frac{1}{(s - \alpha)^2} \\
 \frac{t^n}{n!} \cdot e^{\alpha t} &\longleftrightarrow \frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}}
 \end{aligned}$$

Wichtige Sätze:

$$\begin{aligned}
 a \cdot x(t) + b \cdot y(t) &\longleftrightarrow a \cdot X(s) + b \cdot Y(s) \\
 x(t) * y(t) &\longleftrightarrow X(s) \cdot Y(s) \\
 x(t) \cdot y(t) &\longleftrightarrow X(s) * Y(s) \\
 x(t \pm T) \cdot s(t \pm T) &\longleftrightarrow e^{\pm sT} \cdot X(s) \\
 e^{\pm s_0 t} \cdot x(t) &\longleftrightarrow X(s \mp s_0) \\
 \dot{x}(t) &\longleftrightarrow s \cdot X(s) - x(0) \\
 \ddot{x}(t) &\longleftrightarrow s^2 \cdot X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \\
 \ddot{\ddot{x}}(t) &\longleftrightarrow s^3 \cdot X(s) - s^2 x(0) - s\dot{x}(0) - \ddot{x}(0) \\
 \int_0^t x(\tau) d\tau &\longleftrightarrow \frac{1}{s} \cdot X(s) \\
 \frac{1}{t} \cdot x(t) &\longleftrightarrow \int_s^{\infty} x(\sigma) d\sigma \\
 t^n \cdot x(t) &\longleftrightarrow (-1)^n \cdot \frac{d^n X(s)}{ds^n}
 \end{aligned}$$

Grenzwertsätze:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s) \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)
 \end{aligned}$$

5 Z-Transformation

Einseitige Hintransformation:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} x_{\mu} \cdot z^{-\mu}$$

Rücktransformation:

$$x_{\mu} = \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint z^{\mu-1} \cdot X(z) dz$$

Wichtige Transformationen:

$$\begin{aligned} (a)^{\mu-1} \cdot s(\mu-1) & \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{z-a} \\ (\mu-1) \cdot (a)^{\mu-2} \cdot s(\mu-1) & \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{(z-a)^2} \\ \frac{1}{2} \cdot (\mu^2 - 3\mu + 2) \cdot (a)^{\mu-3} \cdot s(\mu-1) & \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{(z-a)^3} \end{aligned}$$

Wichtige Sätze:

$$\begin{aligned} x(\mu) & \quad \circ \text{---} \bullet \quad X(z) \\ \mu \cdot x(\mu) & \quad \circ \text{---} \bullet \quad -z \frac{dX(z)}{dz} \end{aligned}$$

6 Zweidimensionale Fouriertransformation

Hintransformation:

$$G(f_x, f_y) = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} g(x, y) \cdot e^{-j2\pi(f_x \cdot x + f_y \cdot y)} dx dy$$

Rücktransformation:

$$g(x, y) = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} g(x, y) \cdot e^{j2\pi(f_x \cdot x + f_y \cdot y)} df_x df_y$$

Beschreibung der Objektebene:

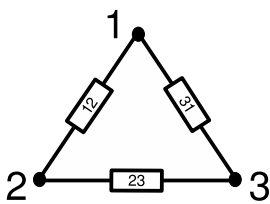
$$g(x, y) = \sqrt{I^2} \cdot (\dots \text{Punktquellen etc.} \dots)$$

Merke:

gerade · ungerade = ungerade
gerade · gerade = gerade
ungerade · ungerade = gerade

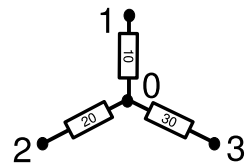
7 Sonstiges

Dreieck - Stern Umwandlung:



$$\begin{aligned} R_{10} &= \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{\sum R} \\ R_{20} &= \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{\sum R} \\ R_{30} &= \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{\sum R} \end{aligned}$$

Stern - Dreieck Umwandlung:



$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{R_{10} \cdot R_{20}}{R_{30}} + R_{10} + R_{20} \\ R_{23} &= \frac{R_{20} \cdot R_{30}}{R_{10}} + R_{20} + R_{30} \\ R_{31} &= \frac{R_{30} \cdot R_{10}}{R_{20}} + R_{30} + R_{10} \end{aligned}$$

Der kapazitive Integrator:

$$u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \cdot \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau$$

Der induktive Integrator:

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \cdot \int_{t_0}^t u_L(\tau) d\tau$$

Der kapazitive Differentiator:

$$i_C(t) = \frac{C \cdot du}{dt} = C \cdot \dot{u}$$

Der induktive Differentiator:

$$u_L(t) = \frac{L \cdot di}{dt} = L \cdot \dot{i}$$

Duale Netzwerke Regeln

<i>Jede innere Masche</i>	$\Leftrightarrow$	<i>freie Knoten</i>
<i>Die äussere Masche</i>	$\Leftrightarrow$	<i>Bezugsknoten</i>
<i>Kondensatoren</i>	$\Leftrightarrow$	<i>Spulen</i>
<i>Leitwerte</i>	$\Leftrightarrow$	<i>Widerstände</i>
<i>Leerlaufzweige</i>	$\Leftrightarrow$	<i>Kurzschlüsse</i>
<i>Schalter Offen</i>	$\Leftrightarrow$	<i>Schalter geschlossen</i>
<i>Ströme...</i>	$\Leftrightarrow$	<i>Spannungen...</i>
<i>Strompfeile</i>	$\Leftrightarrow$	<i>Spannungspfeile</i>

Für die Formelzusammenhänge

$$\begin{aligned} I^D &= \frac{U}{z} \\ U^D &= z \cdot I \\ G^D &= \frac{R}{z^2} \\ C^D &= \frac{L}{z^2} \\ L^D &= C \cdot z^2 \end{aligned}$$

Stationäre Quellen:

- Dauert unendlich lange an.
- Einschaltvorgang liegt soweit zurück, dass alle auftretenden Eigenfunktionen längst abgeklungen sind.
- Anfangszustand spielt keine Rolle mehr.

Komplexe Wechselstromrechnung:

- Linear.
- Zeitinvariant.
- Stabil.
- Konzentriert.
- Stationär und harmonisch erregt.
- Alle Einschwingvorgänge sind abgeklungen.

Konzentriertes Netzwerk

Ein Netzwerk heisst konzentriert wenn die Wellenlänge der verwendeten Frequenz größer ist als die Bauteilgröße. So tritt keine Elektromagnetische Wechselwirkung zwischen den Bauteilen auf.

Beispiel: Hausinstallation: $f = 50\text{Hz}$, $\lambda = 6000\text{km}$

Verteiltes Netzwerk

Ein Netzwerk heisst verteilt wenn die Bauteile im Größenbereich der Wellenlänge sind. Es wird Energie in Form von elektromagnetischen Wellen abgegeben.

Beispiel: Funk, UKW-Antenne, Faltdipol...

Filter-Charakteristiken

$a(t=0) = 0 \wedge a(t \rightarrow \infty) \neq 0$	$\Rightarrow$	Tiefpass
$a(t=0) \neq 0 \wedge a(t \rightarrow \infty) = 0$	$\Rightarrow$	Hochpass
$a(t=0) = 0 \wedge a(t \rightarrow \infty) = 0$	$\Rightarrow$	Bandpass
$a(t=0) \neq 0 \wedge a(t \rightarrow \infty) \neq 0$	$\Rightarrow$	Bandsperre

Rauschspannung:

$$u_{\text{Rausch}} = \sqrt{4k_B \cdot T \cdot \Re\{\underline{Z}\} \cdot \Delta f}$$

8 Vierpoltheorie

8.1 Darstellungen

Widerstandsdarstellung:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Leitwertsdarstellung:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Hybriddarstellung:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Kettendarstellung:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

8.2 Beschaltungsarten

Reihenschaltung:

$$[Z]_{RES} = [Z]_1 + [Z]_2$$

Parallelschaltung:

$$[Y]_{RES} = [Y]_1 + [Y]_2$$

Hybridschaltung:

$$[H]_{RES} = [H]_1 + [H]_2$$

Kettenschaltung:

$$[A]_{RES} = [A]_1 \cdot [A]_2$$

8.3 Eigenschaften

Längssymmetrisch:

$$\begin{bmatrix} \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes \end{bmatrix}$$

Reziprok:

$$\begin{bmatrix} \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes \end{bmatrix}$$

8.3.1 Lustiges:

Und immer daran denken:

$$\iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \cdot e^{-\frac{\pi}{\sigma^2}(x^2+y^2)} \cdot e^{-i2\pi(x^2+y^2)} dx dy = \sigma^2 \cdot e^{-\pi\sigma^2(f_x^2+f_y^2)}$$

Gaus bleibt Gaus