

HM III,IV - Formelsammlung

Matthias Jung

16. September 2008

1 Koordinatensysteme

Polarkoordinaten:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cdot \cos(\varphi(t)) \\ r(t) \cdot \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cdot \cos(\varphi(t)) \\ r(t) \cdot \sin(\varphi(t)) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten: (mit ϑ)

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cdot \cos(\varphi(t)) \cdot \sin(\vartheta(t)) \\ r(t) \cdot \sin(\varphi(t)) \cdot \sin(\vartheta(t)) \\ r(t) \cdot \cos(\vartheta(t)) \end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten: (mit Θ)

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cdot \cos(\varphi(t)) \cdot \cos(\Theta(t)) \\ r(t) \cdot \sin(\varphi(t)) \cdot \cos(\Theta(t)) \\ r(t) \cdot \sin(\Theta(t)) \end{pmatrix}$$

2 Standard-Parametrisierungen

Gerade:

$$\vec{r}(t) = \vec{A} + t \cdot (\vec{E} - \vec{A})$$

Kreis:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + R \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

3 Eigenschaften von Kurven

Länge einer Kurve

$$L = \int_a^b ||r'(t)||_2 dt$$

4 Kurvenintegrale

Potential:

$$\Phi(x, y, z) = -\varphi(x, y, z)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \varphi(x, y, z)$$

Bedingungen das ein Feld ein Vektorfeld ist:

- Jacobimatrix ist Symmetrisch
- $\text{rot}(\vec{F}) = 0$

Wegunabhängigkeit von Potentialfeldern:

$$\int_C \langle \vec{F}, d\vec{x} \rangle = \Phi(A) - \Phi(E)$$

Geschlossene Kurve in einem Potentialfeld:

Wenn innerhalb der Kurve keine Unstetigkeitsstellen sind gilt:

$$\oint_C \langle \vec{F}, d\vec{x} \rangle = \Phi(A) - \Phi(A) = 0$$

Integral über Vektorfeld:

$$\int_C \langle \vec{F}, d\vec{x} \rangle = \int_a^b \langle \vec{F}, \vec{r}'(t) \rangle dt$$

Integral über Skalarfeld:

$$\int_a^b \varphi(\vec{r}(t)) \cdot \|\vec{r}'(t)\|_2 dt$$

Fluss durch eine ebene Kurve:

$$\int_C \langle \vec{F}(x), \vec{n}(x) \rangle ds = \int_C \langle \vec{F}(x), d\vec{n} \rangle$$

$$\text{mit } d\vec{n} = \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}$$

Satz von Green

$$\oint_{\partial B} \langle \vec{w}, d\vec{n} \rangle = \oint_{\partial B} \left\langle \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} \right\rangle = \int_B \text{div} \vec{w} \, dx dy = \int_B \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} dx dy$$

5 Volumenintegrale

Achsenparalleler-Quader:

$$B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

$$\int_B f(x, y, z) dV = \int_{a_3}^{b_3} \left[\int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) dx \right] dy \right] dz$$

Mit Deckel und Bodenfunktion: $\tilde{B}$ ist ein Bereich in der x,y-Ebene.

$$B = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \tilde{B}, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$$

$$\int_B f(x, y, z) dV = \int_{\tilde{B}} \left[\int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

6 Transformationen für Gebiets und Volumenintegrale

Integration durch Substitution:

$$\int_B f(x, y) dx dy = \int_{B'} f(g_1(x, y), g_2(x, y)) \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Kurz:

$$dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Lineare Affine Transformation in Normdreieck

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{p}_1 + \overleftrightarrow{T} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Mit

$$\overleftrightarrow{T} = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1, \vec{p}_3 - \vec{p}_1)$$

Wichtige Verzerrungsfaktoren:

Polarkoordinaten: $dx dy = r \cdot dr d\varphi$

Zylinderkoordinaten: $dx dy dz = r \cdot dr d\varphi dz$

Kugelkoordinaten: $dx dy dz = r^2 \sin(\vartheta) \cdot dr d\varphi d\vartheta$

7 Oberflächenintegrale

TODO

Oberflächenintegrale über Skalarfelder

$$\int_S f(x, y, z) dO = \int_B f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|_2 du dv$$

Oberflächenintegrale über Vektorfelder

$$\int_S \langle \vec{v}, d\vec{O} \rangle = \int_B \langle \vec{v}, \vec{r}_u \times \vec{r}_v \rangle du dv$$

Satz von Gauss

Der Fluss durch eine geschlossene Randfläche kann mit Hilfe der Divergenz und einem Volumenintegral berechnet werden (Satz von Green in der dritten Dimension)

$$\int_B \operatorname{div} \vec{v} dx dy dz = \oint_S \langle \vec{v}, d\vec{O} \rangle$$

Satz von Stokes

Die Zirkulation eines Feldes entlang des Randes einer geschlossenen Kurve ist der Fluss der Rotation des Feldes durch die Fläche, die von der Kurve aufgespannt wird.

$$\Lambda = \oint_{C=\partial S} \langle \vec{v}, d\vec{x} \rangle = \int_S \langle \operatorname{rot} \vec{v}, d\vec{O} \rangle$$

8 Differentialgleichungen

Lineare DGL 1.Ordnung

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x)$$

Die DGL heisst homogen wenn $b(x) = 0$.

Sei $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$ und man Multipliziert die DGL mit $e^{-A(x)}$ und integriert so ergibt sich:

$$y(x) = c \cdot e^{A(x)} + e^{A(x)} \int b(x) \cdot e^{-A(x)} dx$$

Nichtlineare DGLN - Bernoulli DGL:

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x) \cdot y^\alpha(x) \quad \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$$

Diese DGL kann in eine Lineare DGL transformiert werden! Setze dazu:

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x)$$

Seperierbare DGLN:

$$y'(x) = a(x) \cdot b(y(x))$$

$$\frac{dy}{dx} = a(x) \cdot b(y(x))$$

$$\int \frac{1}{b(y(x))} dy = \int a(x) dx$$

Exakte DGLN:

$$\left\langle \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a(x,y) \\ b(x,y) \end{pmatrix} \right\rangle = a(x,y)dx + b(x,y)dy = 0$$

Bedingung für Exaktheit:

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} \quad a = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{und} \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}$$

1 Möglichkeit zur Lösung (Es können falsche Lösungen hinzukommen und richtige wegfallen!):

$$y' = -\frac{a(x,y)}{b(x,y)}$$

2 Möglichkeit mit Hilfe von $df = a dx + b dy$: Konstruktion Durch integrieren und Ableiten.

Was tun wenn DGL nicht exakt?

1 Möglichkeit: nutze Möglichkeit 1 von Oben.

2 Möglichkeit: Integrierender Faktor:

Finde einen Faktor ϕ der mit der DGL multipliziert eine exakte DGL hervorruft!

Lineare DGL 2. Ordnung:

$$y''(x) + a \cdot y'(t) + by(t) = r(t)$$

Die DGL heisst homogen wenn die Erregung $r(t) = 0$ ist. Auch hier gilt das Superpositionsprinzip:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Ansätze für homogene Lösung

2 Eigenfrequenzen: Starke Dämpfung

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} \text{ und } y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

$$y_h(t) = H_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + H_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

1 Eigenfrequenz: Aperiodischer Grenzfall

$$y_1(t) = e^{\lambda t} \text{ und } y_2(t) = e^{\lambda t}$$

$$y_h(t) = e^{\lambda t} (H_1 + H_2 \cdot t)$$

Komplexe Eigenfrequenz: Schwingfall - Schwach gedämpft

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$$

$$\lambda = \alpha + i\beta$$

$$y_1(t) = e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t) \text{ und } y_2(t) = e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t)$$

$$y_h(t) = e^{\alpha t} (H_1 \cos(\beta t) + H_2 \sin(\beta t))$$

Variation der Konstanten

(Beschaffen einer partikulären Lösung)

DGL Typ:

$$y''(x) + a \cdot y'(t) + by(t) = r(t)$$

Ansatz mit $y_1(t)$ und $y_2(t)$ als Fundamentalsystem der Homogenen DGL:

$$y_p(t) = c_1(t) \cdot y_1(t) + c_2(t) \cdot y_2(t)$$

Variierte Konstanten:

$$c_1(t) = - \int \frac{r(t) \cdot y_2(t)}{W(t)} dt$$

$$c_2(t) = \int \frac{r(t) \cdot y_1(t)}{W(t)} dt$$

Wronskydeterminante:

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

Ansätze für inhomogene Lösung

TODO

9 Laplacetransformation**Hintransformation:**

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

Rücktransformation:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{st} ds = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} (F(s) \cdot e^{st}; s_k)$$

mit n = Anzahl der Pole

Wichtige Transformationen:

$$\begin{aligned}
H_C(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{s} \cdot e^{-sC} \\
\delta(t) &\longleftrightarrow 1 \\
\dot{\delta}(t) &\longleftrightarrow s \\
e^{\alpha t} &\longleftrightarrow \frac{1}{s - \alpha} \\
t \cdot e^{\alpha t} &\longleftrightarrow \frac{1}{(s - \alpha)^2} \\
\sin(\beta t) &\longleftrightarrow \frac{\beta}{s^2 + \beta^2} \\
\cos(\beta t) &\longleftrightarrow \frac{s}{s^2 + \beta^2} \\
e^{-\alpha t} \cdot \sin(\beta t) \cdot s(t) &\longleftrightarrow \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \\
e^{-\alpha t} \cdot \cos(\beta t) \cdot s(t) &\longleftrightarrow \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \\
\sinh(at) &\longleftrightarrow \frac{a}{s^2 - a^2} \\
\cosh(at) &\longleftrightarrow \frac{s}{s^2 - a^2} \\
\frac{t^n}{n!} \cdot e^{\alpha t} &\longleftrightarrow \frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}} \\
t^n &\longleftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}
\end{aligned}$$

Sätze der Laplacetransformation:

$$\begin{aligned}
f(t) * g(t) &\longleftrightarrow f(s) \cdot G(s) \\
f(t) \cdot g(t) &\longleftrightarrow F(s) * G(s) \\
x(t \pm a) &\longleftrightarrow e^{\pm sa} \cdot F(s) \\
e^{\pm at} \cdot f(t) &\longleftrightarrow F(s \mp a) \\
\int_0^t f(\tau) d\tau &\longleftrightarrow \frac{1}{s} \cdot F(s) \\
\frac{1}{t} \cdot f(t) &\longleftrightarrow \int_s^\infty F(\sigma) d\sigma \\
t^n \cdot f(t) &\longleftrightarrow (-1)^n \cdot \frac{d^n F(s)}{ds^n} \\
\frac{df(t)}{dt} &\longleftrightarrow s \cdot F(s)
\end{aligned}$$

Lösen von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow F(s) \\
f'(t) &\longleftrightarrow s \cdot F(s) - f(0) \\
f''(t) &\longleftrightarrow s^2 \cdot F(s) - sf(0) - f'(0) \\
f'''(t) &\longleftrightarrow s^3 \cdot F(s) - s^2 f(0) \\
&\quad - sf'(0) - f''(0)
\end{aligned}$$

Heavyside Funktion:

$$H_C(t) = \begin{cases} 0 & t \leq C \\ 1 & t > C \end{cases}$$

Flatung:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

10 Differentialgleichungssysteme

TODO

11 Funktionentheorie

Definiton Komplexe Zahl:

$$z = x + i \cdot y$$

$$z = |z| \cdot e^{i\phi}$$

Realteil x:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

Imaginärteil y:

$$y = \frac{z - \bar{z}}{2}$$

Definiton Komplexe Funktion:

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

Eine Komplexwertige Funktion ordnet jede komplexe Zahl z genau eine komplexe Zahl $w = f(z)$ zu. Die Funktion kann in zwei reelle Funktionen u und v zerlegt werden.

Einfache Funktionen:

Translation:

$$f(z) = z + b$$

Drehstreckung mit Translation:

$$f(z) = a(z - z_0)$$

Hauptwert des Logarithmus:

$$\operatorname{Ln}(z) = \ln|z| + i \cdot \operatorname{Arg}(z)$$

$$z^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Hauptwert des Arguments:

$$-\pi \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \pi$$

Bedingung für Holomorphie:

Cauchy Riemann DGLN:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Kurz:

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x$$

Ableitung:

$$f'(z) = u_x + i \cdot v_y = v_y - i \cdot v_x$$

Bedingung für harmonische Funktion:

$$\Delta U = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Analog:

$$v_{xx} + v_{yy} = 0$$

→ Potentialfeld

Konstruktion von Spiegelpunkten am Kreis

$$(z_0 - Z_M) \overline{(Z_0^* - Z_M)}$$

Konstruktion von Spiegelpunkten an Gerade

Allgemein:

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

Eine Gerade senkrecht auf der reellen Achse:

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = z$$

11.1 Diriclet Probleme**Poissonformel für die obere Halbebene.**

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_o(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt$$

Poissonformel für den Kreis: TODO**Ansätze für Diricletprobleme** $u = a \cdot \operatorname{Arg}(z) + \beta$
Für TODO $u = a \cdot y + \beta$ Für TODO $u = a \cdot \ln|z| + \beta$ Für Ringe und Kreise

Möbiustransformation:

a, b, c, d mit $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0$ und $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Heisst Möbiustransformation.

Konstruktion von Möbiustransformation:

$$\frac{m(z) - w_1}{m(z) - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

Hilfsmittel:

$$\frac{* - \infty}{** - \infty} = \frac{\infty - *}{\infty - **} = 1$$

12 Sonstiges:

Rotation:

$$\text{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial y} \\ \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \cdot \vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \cdot \vec{e}_z$$

Divergenz:

$$\text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Skalarprodukt

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

kreuzprodukt**Inverse einer 2x2 Matrix**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Theoreme:

$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} \cdot [\sin(x - y) + \sin(x + y)]$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \sin(y) \cdot \cos(x)$$

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos(2X)]$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} \cdot [1 + \cos(2X)]$$

$$\arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Funktionsdefinitionen:

Sinus:

$$\sin(\alpha t) = \frac{1}{2i} \{e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}\}$$

Cosinus:

$$\cos(\alpha t) = \frac{1}{2} \{e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}\}$$

Sinus Hyperbolicus:

$$\sinh(\alpha t) = \frac{1}{2} \{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}\}$$

Cosinus Hyperbolicus:

$$\cosh(\alpha t) = \frac{1}{2} \{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}\}$$

Wichtige Integrale:

$$\int \arctan(x) dx = \frac{1}{1+x^2}$$

mit $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$ und $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$