

Formelsammlung Höhere Mathematik I + II

1. Komplexe Zahlen

Komplexe Zahl:

$$z = a + j \cdot b = |z| \cdot e^{j\varphi}$$

Imaginäre Einheit:

$$j = i = \sqrt{-1}$$

Real und Imaginärteil:

$$\Re\{z\} = a \quad \wedge \quad \Im\{z\} = b$$

Umrechnung von Winkel in Bogenmaß:

$$\frac{\varphi}{(2 \cdot \pi)} = \frac{\alpha}{(360^\circ)}$$

Argument einer komplexen Zahl:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\Im}{\Re}\right) + \Xi \quad \begin{array}{ll} \text{für } \Re \geq 0 & \Xi = 0 \\ \text{für } \Re < 0 & \Xi = \pi \end{array}$$

Betrag einer komplexen Zahl:

$$|z| = \sqrt{(\Re^2 + \Im^2)} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

Eulersche Form der Komplexen Zahl:

$$z = |z|(\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)) = |z|e^{j\varphi}$$

Kreise in der Komplexen Ebene:

$$K(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r \} \quad \text{Alles im Kreis Ohne Rand}$$

$$K(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r \} \quad \text{Nur der Rand}$$

$$K(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r \} \quad \text{Alles im Kreis mit Rand}$$

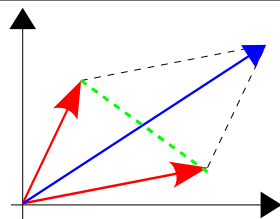
Besondere Winkel:

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°	240°	270°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	%	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\sqrt{3}$	%

Dreiecksungleichung:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2|$$



Betragsricks:

$$(1) \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad (4) \quad e^{j\beta} = \frac{|z|}{z}$$

$$(2) \quad |-z| = |\bar{z}| = |z| \quad (3) \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Komplexe Darstellung von Harmonischer Schwingung:

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \alpha) = \Im(A \cdot e^{j(\omega t + \alpha)}) = \Im(\underbrace{A e^{j\alpha}}_{z_0} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_z) = \Im(z_0 \cdot e^{j\omega t}) \quad \begin{array}{l} z_0 = \text{Amplitude \& Phasenversch.} \\ z = \text{Richtungswinkel}(t) \end{array}$$

Beispiel: Eliminierung von neg. Amplitude:

$$-2 \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = \Im(-2 \cdot e^{-\frac{\pi}{4}j} \cdot e^{2tj}) = \Im(-2 \cdot e^{j\left(\pi - \frac{5}{4}\pi\right)} \cdot e^{2tj}) = \Im(-2 \cdot \underbrace{e^{j\pi}}_{-1} \cdot e^{-\frac{5}{4}\pi} \cdot e^{2tj}) = \Im(2 \cdot e^{-\frac{5}{4}\pi} \cdot e^{2tj})$$

Potenz einer Komplexen Zahl:

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + j \cdot \sin(n\varphi)) = |z|^n \cdot e^{jn\varphi}$$

Merke: zu jeder Zahl a gibt es n verschiedene Wurzeln. (Sogar wenn a Reell ist!)

Wurzel einer Komplexen Zahl:

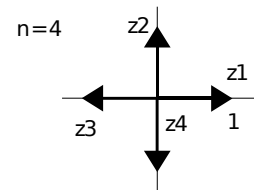
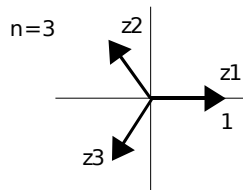
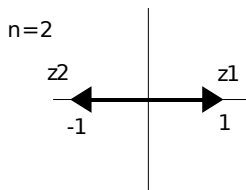
$$\sqrt[n]{a} = z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot (\cos \varphi_k + j \sin \varphi_k)$$

mit:

$$\varphi_k = \frac{\alpha + 2\pi \cdot k}{n} \quad k=1,2,3 \dots n$$

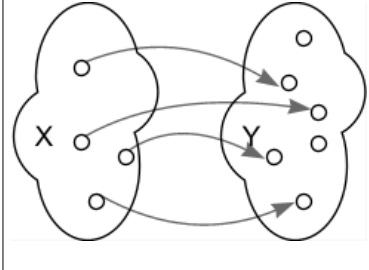
n-te Einheitswurzel: $a=1 \rightarrow |a|=1 \wedge \alpha=0 \rightarrow z_k = \sqrt[n]{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{0^\circ + 2\pi \cdot k}{n}\right) + j \sin\left(\frac{0^\circ + 2\pi \cdot k}{n}\right) \right)$

Beispiele:

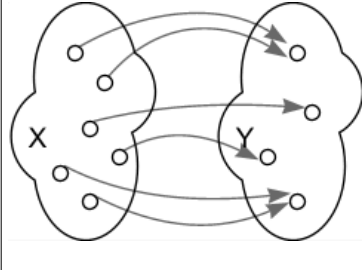


2. Funktionen einer Veränderlichen

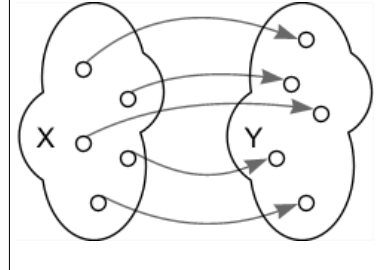
Injektiv:



Surjektiv:



Bijektiv:



Gerade Funktion (Achsensymmetrisch)

$$f(x) = f(-x) \quad x \in D \wedge -x \in D$$

Ungerade Funktion (Punktsymmetrisch)

$$-f(x) = f(-x)$$

Monoton steigend: $x_1 < x_2 \wedge f(x_1) \leq f(x_2)$

Streng monoton st. $x_1 < x_2 \wedge f(x_1) < f(x_2)$

Monoton fallend $x_1 > x_2 \wedge f(x_1) \geq f(x_2)$

Streng monoton fa. $x_1 > x_2 \wedge f(x_1) > f(x_2)$

- Die Summe zweier gerader (ungerader) Funktionen ist wieder eine gerade (ungerade) Funktion.
- Jede streng monotone Funktion ist injektiv.
- Jede injektive Funktion besitzt eine Umkehrfunktion

Beschränktheit:

$U \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq U$ nach oben Beschränkt

$L \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq L$ nach unten Beschränkt

$U, L \in \mathbb{R} \quad L \leq f(x) \leq U$ Beschränkt

- Summe und Produkt beschränkter Funktionen sind beschränkt.
- Die Summe zweier monoton wachsender Funktionen ist monoton wachsend.

Komposition von Funktionen:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Naive Definition der Stetigkeit: eine kleine Ursache Δx hat eine kleine Wirkung Δf

Monoton wachsend:

$$x_1 < x_2 \quad \text{und} \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

streng monoton wachsend

$$x_1 < x_2 \quad \text{und} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Monoton fallend:

$$x_1 < x_2 \quad \text{und} \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

streng monoton fallend

$$x_1 < x_2 \quad \text{und} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Monotonie über Ableitung:

$$f'(x) \geq 0 \quad | \quad f \rightarrow \text{monoton wachsend}$$

$$f'(x) > 0 \quad | \quad f \rightarrow \text{streng monoton wachsend}$$

$$f'(x) \leq 0 \quad | \quad f \rightarrow \text{monoton fallend}$$

$$f'(x) < 0 \quad | \quad f \rightarrow \text{streng monoton fallend}$$

Horner Schema: (Berechnung von Funktionswerten für Polynome von Grad n)

1 Bsp.: $\alpha \cdot x^3 + \beta \cdot x^2 + \gamma \cdot x + \delta$

	α	β	γ	δ
x		$*x \rightarrow +\alpha \cdot x$	$*x \rightarrow +\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x$	$*x \rightarrow +\alpha \cdot x^3 + \beta \cdot x^2 + \gamma \cdot x$
	α	$\alpha \cdot x + \beta$	$\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$	$\alpha \cdot x^3 + \beta \cdot x^2 + \gamma \cdot x + \delta$

2 Bsp.: $f(1) = 2 \cdot x^3 + x^2 + 3 \cdot x + 1 = ?$

	2	1	3	1
1		2	3	6
	2	3	6	7

3 Bsp.: $f(0) = 2 \cdot x^3 + x^2 + 3 \cdot x + 1 = ?$

	2	1	3	1
0		0	0	0
	2	1	3	1

3. Folgen und Reihen:

Potenzreihe:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot x^k = \alpha_k \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$$

Geometrische Reihe:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Asymptotische Gleichheit:

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \Rightarrow a_n \sim b_n$$

Konvergenzradius:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \cdot \left| \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \right| \rightarrow R$$

Exponentialreihe:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Sinus

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Cosinus

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!}$$

Logarithmus ($k=-1$)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

Binomische Reihe:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k$$

Spezialfälle der Binomischen Reihe: (Logisch oder?)

$$\sqrt{1+x} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} \rightarrow \alpha = -2$$

Reihen Ohne Variable:

$$S = f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$$

$R < 1 \quad \rightarrow \quad S \text{ ist Divergent}$

$R > 1 \quad \rightarrow \quad S \text{ ist Konvergent}$

$R = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Spezielle Konvergenzkriterien}$

Konvergenzkriterien Leibnitzkriterium:

(für alternierende Reihen)

$$S = f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \beta_k$$

$$\beta_{k+1} \leq \beta_k \quad \forall k \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0$$

Konvergenzkriterien Wurzelkriterium:

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\alpha_k} \quad r < 1: \quad \text{konvergent}$$

$$r > 1: \quad \text{divergent}$$

$$r = 1: \quad \text{keine Aussage}$$

4. Differentialrechnung:

Differenzen Quotient:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Differentialquotient:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Differentialquotient, 2 Möglichkeit:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Nachweis der nicht Diff'barkeit

$$f \text{ unstetig in } x_0 \Rightarrow f \text{ nicht diffbar in } x_0$$

$$f \text{ diffbar in } x_0 \Rightarrow f \text{ stetig in } x_0$$

Wichtige Ableitungen:

f	x^α	$e^{\alpha \cdot x}$	$\ln x $	$\sin(\omega \cdot x + x_0)$	$\cos(\omega \cdot x + x_0)$	$\tan(\omega x)$	$\text{atan}(\omega x)$
f'	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\alpha \cdot e^{\alpha \cdot x}$	$\frac{1}{x}$	$\omega \cos(\omega \cdot x + x_0)$	$-\omega \sin(\omega \cdot x + x_0)$	$\omega(1 + \tan^2(\omega x)) = \frac{\omega}{\cos^2(\omega x)}$	$\frac{\omega}{1 + (\omega x)^2}$

Taylor Polynom:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x - x_0)^k, \quad \alpha_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Regel von L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \vee \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

5. Integralrechnung:

Partielle Integration

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \left[F(x) \cdot g(x) \right]_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g'(x) dx \quad \text{kurz:} \quad \int_a^b u' \cdot v = \left[u \cdot v \right]_a^b - \int_a^b u \cdot v'$$

Integration durch Substitution:

$$\int_0^4 x \cdot e^{\sqrt{x}} dx \quad \begin{array}{lll} \text{(1) Ersetze } \sqrt{x} = t & \text{(2) Ersetze } dx & \text{(3) Grenzen} \end{array}$$

$$\rightarrow x(t) = t^2 \wedge t(x) = \sqrt{x} \quad \frac{dx}{dt} = [x(t)]' \Rightarrow dx = [x(t)]' \cdot dt = 2t dt \quad t(0) = \sqrt{0} = 0 \quad 2 \cdot \int_0^2 t^3 \cdot e^t dt$$

$$t(4) = \sqrt{4} = 2$$

Uneigentliche Integrale:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

6. Vektorrechnung:

Vektorraum:

$$\mathbb{R}^n \text{ ist Menge aller } n\text{-Tupel} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Nullvektor: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$	Erste Norm: $\ x\ _1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n $ $\ f\ _1 = \int_a^b f(x) dx$	Zweite Norm: $\ x\ _2 = \sqrt{ x_1 ^2 + x_2 ^2 + \dots + x_n ^2}$ $\ f\ _2 = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx}$	Unendliche Norm: $\ x\ _\infty = \max_{i=1}^n x_i $ $\ x\ _\infty = \max f(x) $
---	---	--	--

Richtungscosinus:

$$\vec{x} = \|\vec{x}\|_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_x \\ \cos \phi_y \\ \cos \phi_z \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

$$\langle x, y \rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos(\alpha)$$

Unterraum:

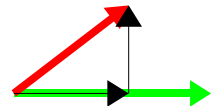
$U \subset V$ ist der Fall wenn gilt:

$$x, y \in U \rightarrow x + y \in U$$

$$x \in U, \alpha \in \mathbb{R} \rightarrow \alpha \cdot x \in U$$

Orthogonale Projektion:

$$a_b = \frac{\langle a, b \rangle}{\|b\|^2} \cdot b$$



Gerade:

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$$

Ebene:

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda_1 \cdot \vec{b} + \lambda_2 \cdot \vec{c}$$

Normalform:

$$E: \vec{x} = \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$E: \vec{x} = \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{p} \rangle$$

Hesse Normalform

$$E: \vec{x} = \vec{n}_0 \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$E: \vec{x} = \langle \vec{n}_0, \vec{x} \rangle - \langle \vec{n}_0, \vec{p} \rangle = 0$$

$$E: \vec{x} = \langle \vec{n}_0, \vec{x} \rangle - d = 0$$

d ist der Abstand zum Ursprung

Koordinatenform:

$$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$$

Cauchy Schwarz Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

Schmitt'sches Orthonormalisierungsverfahren:

$$b^{(1)} = \frac{1}{\|x^{(1)}\|} \cdot x^{(1)} \quad \text{und für } j=2,3,\dots,k:$$

$$\tilde{b}^{(j)} = x^{(j)} - \sum_{i=1}^{j-1} \langle x^{(j)}, b^{(i)} \rangle \cdot b^{(i)}$$

$$b^{(j)} = \frac{1}{\|\tilde{b}^{(j)}\|} \cdot \tilde{b}^{(j)}$$

Jedes $x \in U$ hat die eindeutige Darstellung

$$x = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \dots + \lambda_k x^{(k)}$$

$$\text{mit } \lambda_k = \frac{\langle x, x^{(j)} \rangle}{\|x^{(j)}\|_2^2}$$

7. Matritzen

Transponieren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Matrix Matrix / Vektor Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}$$

Dyadisches Produkt:

$$a \cdot b^T = \text{Matrix}$$

Inverse einer Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Weitere Zusammenhänge z.B. Funktionen mehrerer Veränderlichen fehlen in dieser Formelsammlung.

Mathematische Grundformeln:

Geometrische Summenformel:

$$\underbrace{1}_{z^0} + \underbrace{z}_{z^1} + z^2 + z^3 + \dots + z^n = \sum_{k=0}^n z^k = \begin{cases} n+1 & \text{für } z=1 \\ \frac{z^{n+1}-1}{z-1} & \text{für } z \neq 1 \end{cases}$$

Exponentialreihe:

$$e^x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Gaußsche Summenformel:

$$\sum_{i=1}^n i = 1+2+\dots+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Fakultät:

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$$

Binominalkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k=0 \\ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{k!} & \text{wenn } k \leq 1 \end{cases} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Binomische Formel:

$$(x_1 + x_2)^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot z_1^{n-k} \cdot z_2^k$$

Stirlingformel:

$$b_n = \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \quad n! \sim b_n$$