

1) Auassagenlogik

Atomare Aussage / Formel:

$a, b, c, \dots$
als Variablen die Werte Wahr oder Falsch annehmen können

Literal:

Eine Aussagenlogische Formel $\neg f$ oder f heißt Literal falls f atomar ist.

Syntax der Aussagenlogik:

1. Alle atomaren Formeln sind aussagenlogische Formeln
2. Für alle aussagenlogische Formeln f und g sind $(f \wedge g)$ und $(f \vee g)$ aussagenlogische Formeln
3. Für jede aussagen Formel f ist $\neg f$ eine aussagenlogische Formel.
4. Kein anderer Ausdruck ist eine aussagenlogische Formel

Definition Teilformel:

1. Die Formel e ist eine Teilformel von e
2. Ist e von der Form $(f \wedge g)$ oder $(f \vee g)$ dann sind f und g Teilformeln von e .
3. Ist f eine Teilformel von e und ist g eine Teilformel von f , dann ist g eine Teilformel von e .
4. Kein anderer Ausdruck ist eine Teilformel von e .

Semantik der Aussagen-Logik:

Wahrheitswerte:

Die Menge $\{0,1\}$

Belegung:

Ist eine Funktion $A: D \rightarrow \{0,1\}$

$D = \{ \text{atomare Formeln} \}$

Ist eine Funktion $\hat{A}: E \rightarrow \{0,1\}$

$E = \{ \text{Alle Formeln die aus Ato.F. bestehen} \}$

Operatoren absteigend geordnet (Stärke)

- $\neg a$ Negation (Nicht)
- $a \wedge b$ Konjunktion (Und)
- $a \vee b$ Disjunktion (Oder)
- $a \rightarrow b$ Implikation (statt $\neg a \vee b$)
- $a \Leftrightarrow b$ Äquivalenz
(statt $(f) \wedge (g) \vee (\neg f) \wedge (\neg g)$)

Passend und Modell:

Sei f eine Formel und $\hat{A}: E \rightarrow \{0,1\}$ eine Belegung.

Falls E alle in f vorkommenden atomaren Formeln enthält, so heißt A zu f passend:

Falls A zu f passend ist und $A(f)=1$

$A \models f$
 A ist ein Modell für f

Erfüllbarkeit Tautologie Widerspruch:

Eine Formel f heißt erfüllbar wenn sie mindestens ein Modell besitzt

Eine Formel f heißt Tautologie (gültig) wenn jede zu f passende Belegung ein Modell für f ist.

$\models f$

Eine Formel heißt Widerspruch (unerfüllbar) wenn keine zu f passende Belegung ein Modell für f ist. $\not\models f$

Folgerung:

$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_k \Rightarrow g$

Äquivalenz:

Zwei Formeln f und g heißen äquivalent wenn für alle Belegungen A , die sowohl zu f als auch zu g passend sind, gilt $A(f) = A(g)$.

$f \equiv g$

Wichtige Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
a \wedge b &\equiv b \wedge a && \text{Kommutativgesetz} \\
a \vee b &\equiv b \vee a \\
(a \wedge b) \wedge c &\equiv a \wedge (b \wedge c) && \text{Assoziativgesetz} \\
(a \vee b) \vee c &\equiv a \vee (b \vee c) \\
a \wedge (b \vee c) &\equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c) && \text{Distributivgesetz} \\
a \vee (b \wedge c) &\equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\
a \wedge a &\equiv a && \text{Idempotenzgesetz} \\
a \vee a &\equiv a \\
f \rightarrow g &\equiv \neg f \vee g \\
\neg(f \rightarrow g) &\equiv f \vee \neg g && \text{Negation, Kontraposition} \\
f \rightarrow g &\equiv \neg f \rightarrow \neg g
\end{aligned}$$

De Morgan allgemein:

$$\begin{aligned}
\neg\left(\bigvee_{i=1}^n f_i\right) &= \left(\bigwedge_{i=1}^n \neg f_i\right) \\
\neg\left(\bigwedge_{i=1}^n f_i\right) &= \left(\bigvee_{i=1}^n \neg f_i\right)
\end{aligned}$$

Resolutionsregel:

$$(a \vee b) \wedge (\neg b \vee c) \equiv (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (a \vee c)$$

Vereinfachungsregel:

$$x \vee (\neg x \wedge y) \equiv x \vee y$$

Wichtige Äquivalenzen 2:

$$\begin{aligned}
a \wedge (a \vee b) &\equiv a && \text{Absorptionsgesetz} \\
a \vee (a \wedge b) &\equiv a \\
a \wedge 1 &\equiv a && a \wedge 0 \equiv 0 \\
a \vee 1 &\equiv 1 && a \vee 0 \equiv a && \text{Neutrales Element} \\
a \wedge \neg a &\equiv 0 && \text{Komplement} \\
a \vee \neg a &\equiv 1 \\
\neg(\neg a) &\equiv a && \text{Doppelte Negation} \\
\neg(a \wedge b) &\equiv \neg a \vee \neg b && \text{De Morgan} \\
\neg(a \vee b) &\equiv \neg a \wedge \neg b \\
f \text{ NAND } g &= \neg(f \wedge g) && \text{Nicht-Und} \\
f \text{ NOR } g &= \neg(f \vee g) && \text{Nicht-Oder}
\end{aligned}$$

Distributivgesetz allgemein:

$$\begin{aligned}
\left(\bigvee_{i=1}^n f_i\right) \wedge \left(\bigvee_{j=1}^m g_j\right) &= \bigvee_{i=1}^n \left\{ \bigvee_{j=1}^m (f_i \wedge g_j) \right\} \\
\left(\bigwedge_{i=1}^n f_i\right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^m g_j\right) &= \bigwedge_{i=1}^n \left\{ \bigwedge_{j=1}^m (f_i \wedge g_j) \right\}
\end{aligned}$$

Konsensusregel:

$$(a \wedge b) \vee (\neg b \wedge c) \equiv (a \wedge b) \vee (\neg b \wedge c) \vee (a \wedge c)$$

Resolution:

$$\begin{array}{ccc}
c_1 = a \vee b & & c_2 = \neg b \vee c \\
& \searrow \quad \swarrow & \\
& \bullet & \\
r = a \vee c & &
\end{array}$$

sei f eine Klauselmenge: $RES(f) = f \cup \{r\}$

Es gilt ausserdem:

$$\begin{aligned}
RES^0(f) &= f \\
RES^{n+1}(f) &= RES(RES^n(f)) \\
RES^*(f) &= \bigcup_{n \geq 0} RES^n(f)
\end{aligned}$$

Produktterm:

1. 1
2. ein Literal
3. eine Konjunktion (und) von Literalen wobei keine Variable mehr als einmal auftritt z.B. $(a \wedge b)$

Summenterm:

1. 0
2. ein Literal
3. eine Disjunktion (oder) von Literalen wobei keine Variable mehr als einmal auftritt $(a \vee b)$

DNF / SOP Disjunktive Normalform / Sum of Products:

1. 0
2. ein Produktterm
3. Disjunktion von Produkttermen

KNF / POS Konjunktive Normalform / Products of Sums:

1. 1
2. ein Summenterm
3. eine Konjunktion von Summentermen

Entwicklungssatz nach Shannon:

DNF:

$$f(a_1, \dots, a_n) \equiv a_i \wedge f(a_1, \dots, \mathbf{A(a_i)=1}, \dots, a_n) \vee \neg a_i \wedge f(a_1, \dots, \mathbf{A(a_i)=0}, \dots, a_n)$$

KNF:

$$f(a_1, \dots, a_n) \equiv a_i \vee f(a_1, \dots, \mathbf{A(a_i)=0}, \dots, a_n) \wedge \neg a_i \vee f(a_1, \dots, \mathbf{A(a_i)=1}, \dots, a_n)$$

Tautologie-Prüfung:

f ist Tautologie wenn $\neg f$ unerfüllbar

$f \equiv g$ wenn $\neg(f \leftrightarrow g)$ unerfüllbar

$f \Rightarrow g$ wenn $f \wedge \neg g$ unerfüllbar

Shannon einfach:

$$\text{DNF: } f = a_i \cdot \left[f \right]_{a_i=1} + \bar{a}_i \cdot \left[f \right]_{a_i=0}$$

$$\text{KNF: } f = \left(a_i + \left[f \right]_{a_i=0} \right) \cdot \left(\bar{a}_i + \left[f \right]_{a_i=1} \right)$$

2). Digitale Schaltkreise:

Schreibweisen der Digitaltechnik:

$a+b$ statt $a \vee b$

$a \cdot b$ oder ab statt $a \wedge b$

a' oder $\bar{a}$ statt $\neg a$

$a=1$ statt $\mathbf{A(a)=1}$

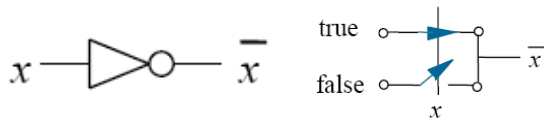
$f=g$ statt $f \equiv g$

$f \oplus g$ statt $f \leftrightarrow g$

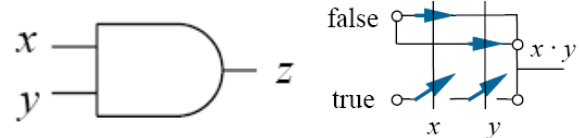
Wahrheitstabellen:

x	y	$\bar{x}$	$x+y$	$x \cdot y$	$\overline{x+y}$	$\bar{x} \cdot \bar{y}$	$x \oplus y$	$x \odot y$
0	0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0	0	0	1

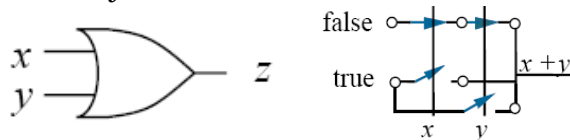
NOT: $x \rightarrow \bar{x}$



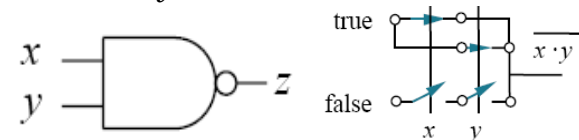
AND: $x \cdot y \rightarrow z$



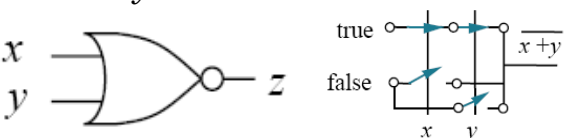
OR: $x+y \rightarrow z$



NAND: $\overline{x \cdot y} \rightarrow z$



NOR: $\overline{x+y} \rightarrow z$



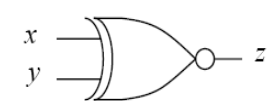
XOR: (Antivalenz)

$$x \oplus y = x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y$$



XNOR: (Äquivalenz)

$$x \leftrightarrow y = x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}$$



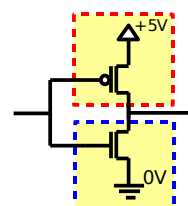
Transistor als Schalter (Spannungsgesteuert)

nMos Transistor:
Schaltet: bei „1“ am Gate
Eignet sich um „0“ Durchzuschalten

pMos Transistor:
Schaltet: bei „0“ am Gate
Eignet sich um „1“ Durchzuschalten

C-MOS Schaltungen:

Sind aus nMos und pMos Transistoren gebaut und bestehen aus einem **Pullup** und einem **Pulldown** Netzwerk.



3). Mengen und Relationen

Enumerative Menge:

$$M = \{ \text{Element1}, \text{Element2}, \dots \}$$

Deskriptive Menge:

$$M = \{ x \mid x \text{ mit der Eigenschaft } P \}$$

Operationen auf Mengen:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \} \text{ Geschnitten}$$

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \} \text{ Vereinigt}$$

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge \neg(x \in B) \} \text{ „Ohne“}$$

Disjunkt:

$$A \cap B = \emptyset \quad A \text{ und } B \text{ haben nichts gemeinsam}$$

Kartesisches Produkt:

$C = A \times B$ ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$

Relation:

Eine Teilmenge R des Produktes $A \times B$ der Mengen A und B heisst binäre Relation.

Eigenschaften von Relationen ($R \rightarrow A$):

1 Reflexiv:

$$(a, a) \in R \mid a \in A$$

2 Symmetrisch:

$$(a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R \mid a, b \in A$$

3 Antisymmetrisch:

$$(a, b) \in R \text{ und } (b, a) \in R \rightarrow a = b \mid a, b \in A$$

4 Transitiv:

$$(a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R \mid a, b, c \in A$$

Teilmenge:

$B \subseteq A$ Falls Elemente von B auch in A enthalten sind.

Kardinalität:

Die Anzahl der Elemente einer Menge bezeichnet man als Kardinalität.

Partition:

Die Menge von Teilmengen A_i für die gilt:

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$A = \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$$

$$A_i \subseteq A$$

Potenzmenge:

ist die Menge aller Teilmengen der Menge A die Potenzmenge hat $2^{|A|}$ Elemente.

Beispiel:

$$P(\{a, b\}) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \}$$

Funktion:

$F \subseteq A \times B$ falls gilt:

$$(a, b) \in F \text{ und } (a, c) \in F \rightarrow b = c$$

(Rechtseindeutig)

$$(a, b) \in F \text{ (Linkstotal)}$$

Äquivalenzrelation:

reflexiv, **symmetrisch** und **transitiv**

Beispiel:

$$R = \{ (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (5,1), (5,3), (5,5) \}$$

Beispiel für transitiv

Verträglichkeitsrelation:

Wenn reflexiv und symmetrisch.

Halbordnung:

Wenn reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

Bolsche Algebra, Hasse-Diagramm siehe Script

4). Graphen

Definition:

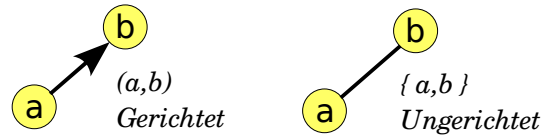
Ein Graph besteht aus einer nichtleeren Menge V von Knoten (vertices) und einer Menge E von Kanten (edges)
 $G=(V,E)$

Teilgraph:

Ein Graph G' heisst Teilgraph des Graphen G wenn gilt:

$$V' \subset V \text{ und } E' \subset E$$

Gerichtet - Ungerichtet:



Knotengrad:

Ungerichteter Graph:

$d(V)$ = Anzahl der Kanten des Knoten

Gerichteter Graph:

$d^+(V)$ = Anzahl der wegführenden Kanten

$d^-(V)$ = Anzahl der hinführenden Kanten

5) Optimierung von Schaltkreisen.

Satz:

Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es eine Darstellung in DNF und KNF

Hauptsatz der Schaltalgebra:

Jede Boolesche Funktion lässt sich als Summe von Produkttermen (DNF) und Produkt von Summentermen (KNF) darstellen.

Minterme und Maxterme:

$$f=0 \rightarrow \text{MAXTERM (OR +)}$$

$$x \equiv 0 \rightarrow x$$

$$x \equiv 1 \rightarrow \bar{x}$$

$$f=1 \rightarrow \text{MINTERM (AND } \cdot \text{)}$$

$$x \equiv 1 \rightarrow x$$

$$x \equiv 0 \rightarrow \bar{x}$$

Beispiel:

X1	X2	f	Terme	DNF (minterme):
0	0	0	$M_0 = x_1 + x_2$	$f = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2) + (x_1 \cdot x_2)$ DNF (maxterme): $f = (x_1 + x_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$
0	1	1	$m_1 = \bar{x}_1 \cdot x_2$	
1	0	0	$M_2 = \bar{x}_1 + x_2$	
1	1	1	$m_1 = x_1 \cdot x_2$	

Implikant:

Ein Monom P (eine Konjunktion von Literalen) heisst Implikant für eine Funktion f wenn gilt:

$$p=1 \rightarrow f=1$$

Primimplikant:

Ein Implikant ist ein Primimplikant falls durch wegstreichen eines Literals im Implikanten kein neuer Implikant für f entsteht.

Zusammenfassen von Monomen:

$$m_i = m_j$$

$$m_i \neq m_j \rightarrow \bar{x} \cdot y + x \cdot y \text{ mit dieser Regel}$$

Satz von Quine:

Eine minimale Summe von Produkten für eine boolesche Funktion besteht ausschliesslich aus Primimplikanten.

Weitere Verfahren und Themen sind im Script zu finden.

© 2007 Matthias Jung – Alle Formeln ohne Gewähr auf Korrektheit

www.myzinsky.de